

## Klausur zur Linearen Algebra I

**Aufgabe 1: (8 Punkte)** Unterstreichen Sie jeweils die richtigen der vier Aussagen (und heften Sie dieses Blatt an die Abgabe!!):

- a) Teilsysteme linear unabhängiger Systeme sind:  
linear unabhängig / linear abhängig / zu Basen ergänzbar /  
zu Basen verkürzbar.
- b) Invertierbare Matrizen:  
sind quadratisch / haben maximalem Rang / sind Isomorphismen  
/ haben linear unabhängige Zeilen.
- c) Sind  $U, W \subset V$  Unterräume mit  $U + W = V$ , so gilt:  
 $U \cap W = \emptyset$  /  $U \cap W = 0$  /  $\dim U + \dim W = \dim V$  /  
 $\dim U + \dim W \leq \dim V$ .
- d)  $m \times n$ -Matrizen mit Zeilenrang  $m$ :  
sind invertierbar / haben Rang  $\leq n$  / haben Rang  $\geq n$  /  
haben linear unabhängige Spalten.
- e) Der Lösungsraum eines Linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = b$  ist:  
ein Unterraum / manchmal leer / manchmal mehr als einelementig  
/ invariant unter Spaltenoperationen.
- f) Die folgenden Größen sind invariant unter Zeilenoperationen auf  
einer Matrix  $A$ :  
Zeilenraum( $A$ ) / Spaltenraum( $A$ ) / Rang( $A$ ) /  $\dim \text{Kern}(A)$ .
- g) Ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $X$  und  $\pi : X \rightarrow$   
 $X/\sim$  die kanonische Projektion, so ist  $\pi$ :  
immer surjektiv / manchmal injektiv / nie injektiv / nie bijektiv.
- h) Ist  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so gilt:  
 $\dim \text{Kern}(f) \leq \dim V$  /  $\dim \text{Bild}(f) \leq \dim V$  /  $f$  ist Iso, sobald  $f$   
Epi/  
Basen von  $\text{Kern}(f)$  und von  $\text{Bild}(f)$  ergänzen sich zu einer Basis  
von  $V$ .

**Aufgabe 2: (4 Punkte)**

- a) Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen  $X$  und  $Y$ . Beweisen Sie:  $f$  ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmenge  $A_1, A_2 \subset X$  gilt:  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .
- b) Sei  $n > 1$  und  $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$ .  
Bestimmen Sie Zykelzerlegung und Signum von  $\sigma$ .

**Aufgabe 3: (4 Punkte)** Sei

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\} \subset \mathbf{R}^4,$$

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_4 = 0\} \subset \mathbf{R}^4.$$

Bestimmen Sie Basen von  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$  und  $U + W$ .

**Aufgabe 4: (4 Punkte)** Sei  $B = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$  und

$$C = ((1, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0)).$$

Beweisen Sie, dass  $B$  eine Basis von  $\mathbf{R}^3$  und  $C$  eine Basis von  $\mathbf{R}^5$  ist. Berechnen Sie die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Basen  $B$  und  $C$ , wobei  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^5$  mit

$$f(x, y, z) := (x + z, 2x + 2y + z, x + y + z, y + z, x).$$

**Aufgabe 5: (4 Punkte)** Gegeben Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von  $\mathbf{L}_{A,0}$ . Für welche  $b \in \mathbf{R}^3$  ist  $\mathbf{L}_{A,b} \neq \emptyset$ ?  
Bestimmen Sie alle Lösungen von  $\mathbf{L}_{A,(4,3,11)}$ .

**Aufgabe 6: (4 Punkte)** Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } (1 - \delta_{i,j})_{i,j} \in M_{n \times n}(K). \text{ Beweisen Sie: ist } A \in M_{n \times n}(K)$$

mit  $A^2 = A$  und  $\det(A) \neq 0$ , so ist  $A = E_n$ .