

Dieser Zettel ist ein Klausurvorbereitungszettel.

**Aufgabe 1:** Kreuzen Sie an:

Aussage	wahr	falsch
Ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, so gilt: $f$ ist ein Isomorphismus, sobald $f$ ein Epimorphismus ist	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Der Zeilenraum einer Matrix ist invariant unter Zeilenumformungen	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Dimension des Kerns einer Matrix ist invariant unter Zeilenumformungen	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Dimension eines Vektorraums ist eine Isomorphieinvariante	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Dimension eines Vektorraums ist manchmal unendlich	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ist ein Unterraum	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$m \times n$ -Matrizen haben manchmal Rang 0	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Invertierbare Matrizen sind quadratisch	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ein Teilsystem eines Erzeugendensystems ist zu einer Basis verkürzbar	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Ein Teilsystem eines Erzeugendensystems ist manchmal ein Erzeugendensystem	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Seien $U$ und $W$ Unterräume eines Vektorraums $V$ . Die Teilmenge $U \cup W$ ist manchmal ein Unterraum	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Seien $U$ und $W$ Unterräume eines Vektorraums $V$ . Die Teilmenge $U \cup W$ ist das Erzeugnis von $U$ und $W$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Invertierbare Matrizen haben linear unabhängige Spalten	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Das Bild eines Erzeugendensystems unter einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist nie ein Erzeugendensystem von $W$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Der Zeilenrang von $m \times n$ -Matrizen ist stets verschieden von $n$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Dimension eines Vektorraums ist immer verschieden von 0	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**Aufgabe 2:** Beschreiben Sie die Fasern folgender Abbildungen:

- $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto x + y,$
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1,$
- $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y),$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos x.$

**LÖSUNG:** a) Für  $z \in \mathbb{Q}$  ist das Urbild die Gerade mit der Gleichung  $y = z - x$ .

b) Für  $\mathbb{R} \ni z \geq -1$  ist das Urbild von  $z$  der Kreis um den Ursprung mit Radius  $\sqrt{z+1}$ , für  $z < -1$  ist das Urbild leer.

c)  $f^{-1}(z_1, z_2) = \frac{1}{5}(z_1 + 2z_2, 2z_1 - z_2)$  für  $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$ .

d)

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) & \text{für } z = 1, \\ (2k+1)\pi & (k \in \mathbb{Z}) & \text{für } z = -1, \\ (2k+1)\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) & \text{für } z = 0, \\ \pm \arccos z + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 3:** Sei  $V$  ein 15-dimensionaler Vektorraum. Konstruieren Sie einen 11-dimensionalen Unterraum  $W \subset V$  und einen 7-dimensionalen Unterraum  $U \subset V$  mit  $\dim(U \cap W) = 6$ .

LÖSUNG: In  $V = k^{15}$  mit Standardbasis  $e_1, \dots, e_{15}$  setze  $W = \langle e_1, \dots, e_{11} \rangle$  und  $U = \langle e_1, \dots, e_6, e_{12} \rangle$ .

**Aufgabe 4:** Sei

$$f: \mathbb{Q}^5 \rightarrow \mathbb{Q}^4, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_1 + x_2 - x_5, x_4 + x_5, x_1 - x_4, x_1 + x_4 + x_5).$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Standardbasen. Konstruieren Sie Basen von Bild  $f$  und  $\ker f$ .

LÖSUNG: Die darstellende Matrix von  $f$  bzgl. der Standardbasen hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Bild von  $f$  ist bereits der ganze  $\mathbb{Q}^4$ , so dass man die Standardbasis darin wählen kann. Demnach wird der Kern erzeugt von dem Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5:** Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -4 & 13 & 10 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie eine Basis von  $L_{A,0}$ . Konstruieren

Sie ein  $b \in \mathbb{Q}^3$ , so dass  $L_{A,b} = \emptyset$ .

LÖSUNG: Eine Basis von  $L_{A,0}$  ist  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ein passendes  $b$  wäre bspw.  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 6:** a) Sei  $A \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$  gegeben durch  $A_{i,j} = 3i + j - 3$ . Berechnen Sie  $\det A$ .

b) Seien  $a, b \in \mathbb{Q}$  und  $A \in \text{Mat}((n+1) \times (n+1), \mathbb{Q})$  gegeben durch  $A_{i,j} = (b + \delta_{i,j}(a - b))$ . Berechnen Sie  $\det A$ .

LÖSUNG: a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ .

b) Die Determinante ist multilinear, also insbesondere linear in den Spalten. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \\ & & & a \\ b & & & \end{vmatrix}}_{=\det A_{n+1}} &= \begin{vmatrix} a-b & b & \dots & b \\ 0 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & b & & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & \dots & b \\ b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ b & b & & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a-b & b & \dots & b \\ 0 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & b & & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 0 & b & \dots & b \\ & a-b & b & \dots & b \\ \vdots & 0 & a & & b \\ & \vdots & & \ddots & \\ b & 0 & b & & a \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b & b & \dots & b \\ & & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & a & & b \\ & & & \ddots & \\ b & b & b & & a \end{vmatrix}}_{=0} \\
 &= \begin{vmatrix} a-b & b & \dots & b \\ 0 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & b & & a \end{vmatrix} + (a-b) \begin{vmatrix} b & b & \dots & b \\ b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ b & b & & a \end{vmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{vmatrix} a-b & b & \dots & b \\ 0 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & b & & a \end{vmatrix}}_{\stackrel{\text{Laplace}}{=} (a-b) \det A_n} + (a-b) \left( \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ b & b & & a \end{vmatrix}}_{=\det A_n} + \underbrace{\begin{vmatrix} b-a & b & \dots & b \\ 0 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & b & & a \end{vmatrix}}_{\stackrel{\text{Laplace}}{=} (b-a) \det A_{n-1}} \right) \\
 &= 2(a-b) \det A_n - (a-b)^2 \det A_{n-1}
 \end{aligned}$$

Behauptung:  $\det A_n = (n-1)(a-b)^{n-1}(a+b) - (n-2)(a-b)^{n-1}a$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Beweis durch vollständige Induktion: Wir brauchen einen doppelten Induktionsanfang, da unsere Rekursionsformel auf die beiden nächstkleineren Indizes zurückgreift.

$n = 1$ :  $\det A_1 = \det(a) = a = (1-1)(a-b)^{1-1}(a+b) - (1-2)(a-b)^{1-1}a$ .

$n = 2$ :  $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = (a-b)(a+b) = (2-1)(a-b)(a+b) - 0$ .

Induktion: Nach unserer Rekursionsformel gilt:

$$\begin{aligned}
 \det A_{n+1} &= 2(a-b) \det A_n - (a-b)^2 \det A_{n-1} \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} 2(a-b) \left( (n-1)(a-b)^{n-1}(a+b) - (n-2)(a-b)^{n-1}a \right) \\
 &\quad - (a-b)^2 \left( (n-2)(a-b)^{n-2}(a+b) - (n-3)(a-b)^{n-2}a \right) \\
 &= 2(n-1)(a-b)^n(a+b) - 2(n-2)(a-b)^n a \\
 &\quad - (n-2)(a-b)^n(a+b) + (n-3)(a-b)^n a \\
 &= n(a-b)^n(a+b) - (n-1)(a-b)^n a.
 \end{aligned}$$

□