

Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen
Themenstellung für die schriftliche Prüfung (Klausur)
im Fach: Mathematik - Zahlentheorie (Fachwissenschaft)
Name des/der Kandidaten/in:

Aufgabe / Aufgaben:

Aufgabe 1:

- a) Formulieren Sie den Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung.
- b) Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
- c) Zeigen Sie: sind p_1, \dots, p_k die ersten k Primzahlen, so ist die $(k+1)$ -te Primzahl $\leq p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1$.

Aufgabe 2:

- a) Formulieren Sie den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers.
- b) Beweisen Sie, dass bei einer Division mit Rest $a = sb + r$ gilt: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$.
- c) Bestimmen Sie $x, y \in \mathbf{Z}$ mit $1 = 21x + 13y$.

Aufgabe 3:

- a) Definieren Sie die Euler- φ -Funktion und geben Sie eine explizite Formel für $\varphi(n)$ (mit $n \geq 1$) in Termen der Primfaktorzerlegung von n an.
- b) Beweisen Sie die Formel $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$ für eine Primzahl p und $m \geq 1$.
- c) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbf{N}$ mit $\varphi(n) = 4$.

Aufgabe 4:

- a) Definieren Sie das Legendre-Symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ und formulieren Sie das quadratische Reziprozitätsgesetz.
- b) Entwickeln Sie eine Formel für $\left(\frac{3}{p}\right)$ für eine Primzahl $p \geq 5$ (Tipp: die Lösung lässt sich mittels der Restklasse von p modulo 12 formulieren).
- c) Entscheiden Sie die Lösbarkeit der quadratischen Kongruenz $x^2 - 2x + 101 \equiv 0 \pmod{103}$.

Aufgabe 5:

- a) Formulieren Sie den Chinesischen Restesatz.
- b) Lösen Sie die folgende Aufgabe aus einem chinesischen Rechenbuch: „Eine Bande von 17 Räubern stahl einen Sack mit Goldstücken. Als sie ihre Beute in gleiche Teile teilen wollten, blieben 3 Goldstücke übrig. Beim Streit darüber, wer ein Goldstück mehr erhalten sollte, wurde ein Räuber erschlagen. Jetzt blieben bei der Verteilung 10 Goldstücke übrig. Erneut kam es zum Streit, und wieder verlor ein Räuber sein Leben. Jetzt ließ sich endlich die Beute gleichmäßig verteilen. Wie viele Goldstücke waren mindestens im Sack?“