

Prof. Dr. M. Reineke
Dr. R. Olbricht
Dipl.-Math. M. Boos

25. September 2009
Bearbeitungszeit:
10:00 bis 12:00

Nachklausur zur Elementaren Zahlentheorie

Bitte in Blockschrift und lesbar ausfüllen:

Name:

Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6
Max. Punktzahl	8	4	4	4	4	4
Erreichte Punktzahl						

Gesamtpunktzahl (max. 28 Punkte):

Aufgabe 1: (8 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Aussage	wahr	falsch
Sind $a, b \in \mathbf{N}$ teilerfremd, so gibt es $x, y \in \mathbf{Z}$ mit $ax + by = 2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für genügend großes n ist die n -te Fibonacci-Zahl größer als n^{22} .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Eine prime Restklasse $[a]$ modulo m ist primitiv, falls $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für die Euler- φ -Funktion gilt $\varphi(m) = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} $.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gilt stets $\varphi(2n) = \varphi(n)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt unendlich viele Primzahlen $\equiv -1 \pmod{3}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Restklasse $[7]$ besitzt ein Inverses in $\mathbf{Z}/98\mathbf{Z}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für $\text{ggT}(a, m) = 1$ gilt: $\text{ord}_m[a]$ teilt $m - 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{27}{52}$ besitzt eine Vorperiode der Länge 2.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\left(\frac{9}{101}\right) = 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die diophantische Gleichung $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ für $x, y, z \in \mathbf{Z}$ besitzt unendlich viele Lösungen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\left(\frac{a \cdot b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$ falls $p \nmid a, b$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$m_p(\text{kgV}(m, n)) = \min(m_p(m), m_p(n))$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Eine Zahl besitzt so viele verschiedene maximale echte Teiler wie verschiedene Primfaktoren.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Genau die geraden Potenzen einer primitiven Restklasse \pmod{p} sind quadratische Reste \pmod{p} .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gilt stets $\text{ggT}(n, m) = \text{ggT}(m, n - km)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 2: (4 Punkte) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $n > 2$ mit $2|n, 3|n + 1, 4|n + 2, 5|n + 3, 6|n + 4$.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Charakterisieren Sie die Primzahlen p , für die die Kongruenz $x^2 + 6x + 4 \equiv 0 \pmod{p}$ eine Lösung x besitzt.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Vielfachen von 12 mit genau 2 verschiedenen Primfaktoren und genau 14 Teilern.

Aufgabe 5: (4 Punkte) Bestimmen Sie eine primitive Restklasse modulo 17. Wieviele solche gibt es?

Aufgabe 6: (4 Punkte) Beweisen Sie, dass $7 \nmid \binom{82}{12}$, aber $7 \mid \binom{82}{36}$.